פתרון לבחינה מ 31/07/17

שאלה 1

א. יהי $e_{i,j}$ - תוחלת זמן ההגעה ממצב i למצב j.
מתקיים $e_{0,1} = 1 + 0.6 \cdot 0 + 0.4 e_{-1,1}$. מתקיים $e_{-1,1} = e_{-1,0} + e_{0,1} = 2e_{0,1}$.
לכן מתקיים $e_{0,1} = 1 + 0.4 \cdot 2e_{0,1}$ ו $e_{0,1} = 5$.

ב. יהי e_i - תוחלת זמן ההגעה ממצב i לאחד מהמצבים -2 או 2.
מתקיים

$$\begin{cases} e_{-1} = 1 + 0.4 \cdot 0 + 0.6 e_0 \\ e_0 = 1 + 0.4 e_{-1} + 0.6 e_1 \\ e_1 = 1 + 0.4 e_0 + 0.6 \cdot 0 \end{cases}$$

ג. לפי מה שלמדנו, בהילוך מקרי סימטרי, כל המצבים כולל מצב 6 הם נשנים. ממצב 6 ניתן להגיע למצב 0. אילו לא היו מגיעים ממצב 0 למצב 6 בודאות, אז מצב 6 לא היה נשנה. לכן, כאשר מתחילים במצב 0, בהסתברות 1 מגיעים באיזשהו שלב למצב 6.

ד. מצב 0 הוא נשנה. לכן בהסתברות 1 מבקרים בו אין סוף פעמים. בכל פעם שנמצאים במצב 0 יש סיכוי של 0.5 להגיע בשלב הבא למצב 1. כל ביקור במצב 0 שעד אליו לא הגענו למצב 1, הוא אחרון לפני הגעה למצב 1, בסיכוי 0.5. לכן ההתפלגות היא $G(0.5)$.

<u>הערה</u>
אילו לא היה ניתן לחזור ממצב 0 לעצמו, אז ההתפלגות לא היתה גיאומטרית.
אילו לא הינו חוזרים ממצב -1 למצב 0 בודאות, אז לא בהכרח היה קיים ביקור ראשון במצב 1, ולכן "מספר הביקורים במצב 0, עד הביקור הראשון במצב 1" לא היה מוגדר. לכן חשוב לציין שמצב 0 הוא נשנה.

שאלה 2

א. מצב 0 - התחנה ריקה
מצב 1- יש לקוח אחד בשירות
מצב 2- יש לקוח אחד בשרות ואחד בהמתנה
אם יש לקוח בשרות אז קצב העזיבה של התחנה הוא 1.
אם מקום ההמתנה לא תפוס אז קצב הכניסה לתחנה הוא 1.
היוצר האינפינטיסימלי הוא

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

מטריצת המעבר בזמני הקפיצות היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{1+1} & 0 & \frac{1}{1+1} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ב. לקוחות נדחים אם הם מגיעים בזמן שבתחנה ישנם שני לקוחות. פרופורצית הנדחים שווה לפורופורצית הזמן שבו נמצאים במצב 2 ששווה להסתברות הסטציונרית של מצב 2.

$$\begin{cases} \pi_0 = 0.\pi_1 \\ 2\pi_1 = \pi_0 + \pi_2 \\ \pi_1 = \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

מתקבל $\pi_2 = \frac{1}{3}$.

<u>הערה</u>

מדובר בהסתברות הסטציונרית לאורך זמן ולא בהסתברות הסטציונרית בזמני הקפיצות.

<u>שאלה 3</u>

<u>א.</u> ההסתברות להכחדות כאשר מתחילים עם שני פרטים שווה לרבוע ההסתברות להכחדות כאשר בדור ההתחלתי יש פרט אחד.

תוחלת מספר הצאצאים של כל פרט היא $\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{4}{3}>1$. לכן סיכויי ההכחדות, כאשר מתחילים עם פרט אחד שווים לפתרון הקטן שגדול מ 0 וקטן מ 1 של המשוואה $t=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t^2$.

פתרון זה הוא 0.5. לכן, כאשר מתחילים עם שני פרטים סיכויי ההכחדות הם $0.5^2=0.25$.

<u>ב.</u> כל המצבים חוץ ממצב 0 הם לא ארגודים (יש מהם מסלולים למצב 0 ואין ממצב 0 דרך חזרה אליהם). לכן כל המצבים חוץ ממצב 0 הם חולפים.

אם יש הכחדות, אז לאחר מספר צעדים סופי מגיעים למצב 0.

אם אין הכחדות, אז מבלים רק במצבים חולפים. בכל מצב חולף מבלים רק מספר סופי של פעמים. לכן לא ניתן לבלות מספר אין סופי של פעמים במספר סופי של מצבים חולפים, ולכן מבקרים באין סוף חולפים שונים.

לכן ההסתברות לבקר באין סוף מצבים חולפים שונים שווה להסתברות שלא תהיה הכחדות שהיא $1-0.25=0.75$.

<u>שאלה 4</u>

<u>א.</u> זה אפשרי.

נתן דוגמא מתאימה. מטריצת המעבר תהיה

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בהסתברות 1 מתקיים $(X_5=3, X_6=1)$. כל משתנה Y_n מקבל את הערכים 1 או 3 בסיכוי שווה ובאופן בלתי תלוי במשתנים האחרים. ההיסטוריה לא רלוונטית ובכל שלב יש את אותן הסתברויות מעבר.

<u>הערה</u>

בדוגמא זו ערכם של X_5 ושל X_6 ידוע מראש. אם זוג המשתנים יכול לקבל ערכים מגוונים יותר, אז התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ אינו מרקובי לפי השיקול שמתואר בתשובה לסעיף ב' ושתקף גם במקרה זה.

למשל, דוגמא לא מתאימה היא שרשרת שמטריצת המעבר שלה היא

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

במקרה זה מתקיים למשל $P(Y_3 = 1 \mid Y_2 = 2, Y_1 = 1) = \frac{1}{2} \neq 0 = P(Y_3 = 1 \mid Y_2 = 2, Y_1 = 3)$,
וכך ההיסטוריה הקודמת משנה את הסיכוי.

ב. לא יתכן שזו שרשרת מרקוב עבור כל מצב התחלתי.
מכיון שהשרשרת בלתי פריקה, אז מכל מצב יש הסתברות לחזור באיזשהו שלב למצב 1.
מכיון שהמצבים חולפים, אז קיימים מצבים שמהם לא בודאות חוזרים באיזשהו שלב למצב 1.
לכן קיים מצב k שממנו אפשר לעבור ישירות ליותר ממצב אחד (אילו לגבי כל מצב היה ידוע מראש לאיזה מצב אחר עוברים ממנו, אז לא היה יתכן שיש אפשרות שנחזור למצב ויש אפשרות שלא נחזור למצב). נקרא לשני מצבים שאליהם ניתן לעבור ממצב k : i ו j .
מתקיים למשל $P(Y_3 = j \mid Y_2 = k, Y_1 = j) \neq 0 = P(Y_3 = j \mid Y_2 = k, Y_1 = i)$.
לכן ההיסטוריה הקודמת מוסיפה מידע, ולכן לא מתקיימת תכונת המרקוביות.

ג. זה לא אפשרי.
הקפיצה הראשונה ארעה בין זמן ההתחלה לבין זמן הקפיצה השניה. לא ידוע מתי בקטע זמן זה היא ארעה. גם בהינתן ערכו של Y_n מסוים, לא ידוע מתי היא התרחשה. כאשר נוסף מידע לגבי ערכי Y_n שונים, אז משתנות הצפיפויות המותנות של ערכי הקפיצה הראשונה. כל ערך קודם מוסיף מידע ולכן משנה את ההסתברויות המותנות לערכים שיקבלו המשתנים הבאים בסדרה.

ד. נתן דוגמא שבה התהליך איננו שרשרת מרקוב.
בדוגמא זו לא חשוב מהן עוצמות הזרמים בין המצבים השונים. חשוב רק אילו מעברים אפשריים.
מתחילים במצב 0. מכל שלם אי שלילי יש מעבר לשלם העוקב לו. כמו כן יש מעבר מ 0 ל -1 ומעבר מ -1 ל 3 . נניח שאלה הם המעברים היחידים מהשלמים האי שליליים ומ -1 .
מתקיים $P(X(t_3+1) > 3 \mid X(t_2+1) = 3, X(t_1+1) = -1) = 1$.
מתקיים $P(X(t_3+1) > 3 \mid X(t_2+1) = 3, X(t_1+1) = 1) < 1$.
לכן ההיסטוריה הקודמת מוסיפה מידע.
<u>הסבר</u>
אם בשלב קודם התהליך ביקר ב -1 , אז בקפיצה השלישית חייבים להיות ימינה למצב 3, ובודאי שביחידת זמן לאחריה חייבים להיות ימינה למצב 3.
אם בעבר התהליך ביקר במצב 1, אז הקפיצה השלישית היא למצב 3 ואפשרי שיחידת זמן אחריה התהליך עדיין יהיה במצב 3.

שלומי