

**בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים**

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.  
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.  
בארבעת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.  
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.  
הצובר  $N$  נקודות יקבל ציון  $\min\{N, 100\}$ .  
נמקו את תשובותיכם!  
אנא השאירו את העמוד הראשון ( צד אחד של דף ) של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה !

---

**שאלה 1** ( 18 נקודות )

נתונה שרשרת מרקוב  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  בת קבוצת המצבים  $\{1,2,3,\dots,9\}$ .  
נניח שמתקיים  $P_{1,2} = 1$ ,  $P_{9,8} = 1$ , ועבור כל  $2 \leq i \leq 8$ ,  $P_{i,i-1} = P_{i,i+1} = 0.5$ .

**א.** מהי תוחלת מספר הצעדים עד חזרה ממצב 1 לעצמו לראשונה ?

**ב.** האם קיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,1}^{(n)}$  ?

---

**שאלה 2** ( 18 נקודות )

יהי  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  תהליך הסתעפות שבו מספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כפי ש  $Z$  מתפלג,  
כאשר  $P(Z=2) = \frac{2}{3}$ ,  $P(Z=0) = \frac{1}{3}$ . נניח שמתקיים  $(Y_0 = 2)$ .

**א.** מהו  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_{n+1} \geq Y_n)$  ?

**ב.** מהי בקירוב ההסתברות שהתהליך לעולם לא יבקר בקבוצת המצבים

$\{100, 101, 102, \dots, 196\}$  ?

---

### שאלה 3 (36 נקודות)

יהי  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  הילוך מקרי על הישר ( כל השלמים כולל חיוביים, שליליים ואפס ).  
נניח שבכל שלב עושים צעד אחד ימינה בסיכוי 0.6 וצעד אחד שמאלה בסיכוי 0.4 .  
עבור כל  $0 \leq n < \infty$  יהי  $Y_n = |X_n|$  ( הערך המוחלט של  $X_n$  ).

- א. האם התהליך  $\{2X_n\}_{n=0}^{\infty}$  הוא שרשרת מרקוב ?
- ב. נניח ש  $(X_0 = 0)$  . האם התהליך  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  הוא שרשרת מרקוב ?
- ג. נניח ש  $(X_0 = 1)$  . האם התהליך  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  הוא שרשרת מרקוב ?
- ד. מהי ההסתברות שקיימים אין סוף מצבים שבהם התהליך  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  יבקר יותר מפעם אחת ?

### שאלה 4 (36 נקודות)

נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף  $X(t)$  על קבוצת המצבים של כל השלמים ( חיוביים, שליליים ואפס ) ובעלת יוצר אינפיניטיסימלי  $\Lambda$  .  
נניח שעבור כל  $-\infty < i \leq 0$  מתקיים  $\Lambda_{i,i-1} = 2$  ,  $\Lambda_{i,i} = -3$  ,  $\Lambda_{i,i+1} = 1$  ,  
ועבור כל  $0 < i < \infty$  מתקיים  $\Lambda_{i,i} = -3$  ,  $\Lambda_{i,i+1} = 3$  .  
נניח שמתקיים  $X(0) = 0$  .

- א. מהי תוחלת הזמן עד שהתהליך יגיע לראשונה למצב -2 או למצב 2 ?
- ב. מהו  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) > 0)$  ?
- ג. מהו  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(X(t+1) - X(t))$  ?
- ד. מהי תוחלת הזמן הכולל שבו התהליך  $X(t)$  יבלה במצב 0 במשך כל תקופות השהות במצב 0 ?

#### הערה

אם למשל בזמן  $\alpha$  התהליך עוזב לראשונה את מצב 0 והוא חוזר אליו לראשונה בזמן  $\beta$  ואז עוזב בזמן  $\delta$  ויותר לא חוזר למצב 0 , אז הזמן הכולל הוא  $(\alpha - 0) + (\delta - \beta)$  .