

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בארבעת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!
אנא השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה !

שאלה 1 (18 נקודות)

נתון גרף לא מכוון בעל קבוצת הצמתים $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$. נניח שנתון שלכל צומת בגרף זה יש לפחות שכן אחד, וגם נתון שאין בגרף זה מעגלים.
תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב של הילוך מקרי על גרף זה, כך שבכל שלב עוברים מהצומת שבו נמצאים לאחד משכניו, כך שיש סיכוי שווה לעבור לכל אחד מהשכנים.

א. האם יתכן שלא קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,2}^{(n)}$ אך כן קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,j}^{(n)}$ עבור כל $j \geq 3$?

ב. כעת נניח שכאשר נמצאים בצומת 8, אז בשלב הבא עוברים לצומת שנבחר בסיכוי שווה מבין קבוצת הצמתים שמורכבת מהצומת 8 ושכניו של הצומת 8 בגרף. נמשיך להניח שכאשר נמצאים בצומת אחר, עוברים לצומת שנבחר בסיכוי שווה רק מבין שכניו.

מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך שקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,1}^{(n)}$.

שאלה 2 (18 נקודות)

יהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות. נניח שמתקיים $(X_0 = 1)$.
נניח שמספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כפי שמתפלג Z , כאשר מתקיים
 $P(Z = 0) = P(Z = 50) = 0.01$, $P(Z = 1) = 0.98$.

א. מהו בקירוב או בדיוק $P(X_2 > 20)$?

ב. מהי בקירוב או בדיוק ההסתברות להכחדות ?

(כל קירוב שניתן צריך להיות בעל דיוק של שלוש ספרות אחר הנקודה).

שאלה 3 (36 נקודות)

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בזמן רציף בעלת קבוצת המצבים $\{1,2,3\}$ ובעלת יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- א.** קבעו עבור כל מצב אם ההסתברות הסטציונרית שלו בתהליך שבזמני הקפיצות גדולה, קטנה או שווה להסתברות הגבולית שלו לאורך זמן.
- ב.** עבור אילו מבין המצבים ההתחלתיים האפשריים, קיימת התפלגות גבולית לתהליך בזמני הקפיצות?
- ג.** נניח שמתחילים במצב 1. מהי תוחלת הזמן עד שמגיעים לראשונה למצב 3?
- ד.** מהי ההסתברות שיהיה קיים פרק זמן קצר מ 0.01 שבו יהיו לפחות שתי קפיצות בתהליך?
-

שאלה 4 (36 נקודות)

יהי $i - i$ מצב התחלתי בשרשרת מרקוב בלתי פריקה בת אין סוף מצבים. בחלק מהסעיפים, תוכלו, אם תרצו, להשתמש בנוסחאת סטרלינג שלפיה

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

- א.** האם יתכן ש i מצב נשנה ומתקיים $f_{i,i}^{(n)} > 0$ רק עבור מספר סופי של ערכי n ?
- ב.** האם יתכן ש i מצב נשנה אפס, אך בהינתן שחוזרים אליו לראשונה לאחר מספר אי זוגי של צעדים, תוחלת מספר הצעדים עד אותה חזרה ראשונה היא סופית?
- ג.** האם יתכן ש i מצב חולף ובנוסף מתקיים שבהינתן שחזרנו אליו, תוחלת מספר הצעדים עד שחזרנו אליו לראשונה היא אין סופית?
- ד.** האם יתכן ש i מצב חולף ובנוסף מתקיים שבהינתן שחזרנו אליו, תוחלת מספר הצעדים עד שחזרנו אליו לראשונה היא סופית?
-