פתרון לבחינה מ 20/07/18

שאלה 1

א. זה יתכן.
נניח שבין צומת 1 לצומת 2 יש קשת ואין קשתות בין שני צמתים אלה ליתר צמתי הגרף.
כך אי אפשר להגיע מהצמתים 1 ו 2 ליתר צמתי הגרף. לכן מתקיים $P_{1,j}{}^{(n)} = 0$ עבור $j \geq 3$ ועבור כל ערך של n. אם מתחילים במצב 1 אז בשלבים האי זוגיים נמצאים במצב 2 ובשלבים הזוגיים נמצאים במצב 1, וכך לא קיים הגבול ל $P_{1,2}{}^{(n)}$ כאשר $n \to \infty$.

ב. דרוש שההילוך ברכיב הקשירות שמכיל את הצומת 1 יהיה לא מחזורי. הילוך מקרי על גרף חסר מעגלים הוא מחזורי כי כדי לחזור לצומת המקור חייבים לעבור על כל קשת מספר זוגי של פעמים. בצומת 8 ניתן לבקר בשני צעדים רצופים. לכן ההילוך ברכיב זה לא מחזורי. כדי שיהיה קיים הגבול של ל $P_{1,1}{}^{(n)}$ כאשר $n \to \infty$ צריך שהצמתים 1 ו 8 יהיו באותו רכיב קשירות, זאת אומרת שיש מסלול מהאחד לאחר.

שאלה 2

א.

$$P(X_2 > 20) = P(X_1 = 1, X_2 = 50) + P(X_1 = 50, X_2 > 20) \cong$$
$$\cong 0.98 \cdot 0.01 + 0.01 \cong 0.02$$

אם בדור הראשון אין פרטים, אז חייבים להשאר במצב 0.
אם בדור הראשון יש פרט אחד, אז צריך שיהיו לו לפחות 20 צאצאים, וזה קורה רק אם יש לו 50 צאצאים.
אם בדור הראשון יש 50 פרטים, אז הסיכוי שבדור הבא יהיו לא יותר מ 20 פרטים הוא זניח.
נראה זאת: כדי שיהיו לא יותר מ 20 צאצאים, צריך שללפחות 30 פרטים מתוך ה 50 לא יהיו צאצאים. מספר הפרטים שאין להם צאצאים מתפלג $\text{Bin}(50,0.01)$. לכן הוא בעל תוחלת 0.5 ושנות קטנה מ 0.5 .לפי אי שיוויון צ'בישב, ההסתברות שיתקבל ערך של לפחות 30 אינה גדולה מ $\frac{0.5}{29.5^2}$. לכן ההסתברות שבדור הראשון יהיו 50 פרטים ובדור השני יהיו לא יותר מ 20 פרטים אינה גדולה מ $0.01 \cdot \frac{0.5}{29.5^2}$.

ב. חשוב מה קורה קודם, שלפרט אין צאצאים או שלפרט יהיו 50 צאצאים.
אם קודם יהיה פרט ללא צאצאים אז תהיה הכחדות. אם קודם יהיה פרט עם 50 צאצאים, אז סיכויי ההכחדות יהיו זניחים (לכל שושלת שמתחילה בפרט אחד יש סיכוי לא קטן לא להכחד ולכן ל 50 שושלות כאלה יש סיכוי זניח להכחד.
לכן סיכויי ההכחדות הם בקירוב $0.5 = \frac{0.01}{0.01+0.01}$.
ניתן לראות שבסביבה קרובה של 0.5 קיימת נקודה שבה $g(t) > t$ וקיימת נקודה שבה $g(t) < t$. מכיון שהפונקציה $g(t)$ רציפה, אז הפתרון נמצא בסביבה זו.

שאלה 3

א. מצב 1 הוא מצב חולף ולכן יש לו הסתברות גבולית של 0 גם בזמני הקפיצות וגם לאורך זמן.
מבלים במחצית מהקפיצות בכל אחד מבין המצבים 2 ו 3. השהיות במצב 2 הן בממוצע קצרות יותר. לכן ההסתברות הגבולית שלו לאורך זמן קטנה מההסתברות הסטציונריות שלו, בזמן שההסתברות הגבולית של מצב 3 גדולה מההסתברות הסטציונרית שלו בזמני הקפיצות.

הערה
לתהליך לאורך זמן יש התפלגות גבולית. בגלל המחזוריות, בתהליך שבזמני הקפיצות, אין התפלגות גבולית. אבל יש התפלגות סטציונרית.

ב. המחלקה של שני המצבים הנשנים 2 ו 3 היא מחלקה מחזורית ונשנית חיובית בזמני הקפיצות. לכן אם מתחילים באחד משני מצבים אלה, אז אין הסתברויות גבוליות.
אם מתחילים במצב 1, אז בסיכוי חצי נמצאים במצב 2 בקפיצות האי זוגיות ובסיכוי חצי נמצאים במצב 2 בקפיצות הזוגיות. לכן במקרה זה יש הסתברויות גבוליות של חצי לכל אחד מהמצבים 2 ו 3.

ג. שוהים במצב 1 זמן בעל תוחלת $\frac{1}{2}$ שלאחריו בסיכוי $\frac{1}{2}$ מגיעים ישירות למצב 3 ובסיכוי $\frac{1}{2}$ מגיעים למצב 2 שבו מבלים זמן ממוצע של $\frac{1}{9}$ עד הגעה למצב 3.
לכן התוחלת היא $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}$.

ד. לפי הלמה של בורל קנטלי בהסתברות 1 יהיו אין סוף פרקים כאלה.
נסתכל על קבוצת מאורעות שלאחר הגעה למצב 2 בפעם ה $-i$ נעזוב אותו לאחר פרק זמן הקצר מ 0.01 . מאורעות אלה הם ב"ת. לכל אחד מהמאורעות שבסדרה זו יש אותה הסתברות קבועה, כך שסכום ההסתברויות הוא אין סוף.
הערה
אם מתחילים במצב 1 אז יש תלות בין המאורעות שיהיו לפחות שתי קפיצות בכל שני קטעי זמן וגם אם הם זרים. הסיבה היא שיש שלושה קצבי עזיבה שונים לשלושת המצבים. מה שקורה בקטע זמן אחד משפיע על זהות נקודת ההתחלה בקטע זמן אחר.
אם מתחילים במצב 2 או במצב 3 אז בכל מקרה דרושות שתי קפיצות שפרק הזמן עד שאחת מהן מתרחשת מתפלג $exp(9)$ ופרק הזמן עד שהשניה מתרחשת מתפלג $exp(1)$ ולא חשוב הסדר שלהן. לכן במקרה זה יש אי תלות בין קטעי זמן זרים.

שאלה 4

א. זה יתכן. נתן דוגמא של שרשרת שקבוצת מצביה היא של הטבעיים.
נניח שמתקיים $P_{1,i}=0.5^{i-1}$ לכל $i\geq 2$ ושמתקיים $P_{i,1}=1$ לכל $i\geq 2$. כך חוזרים למצב 1 לראשונה בהכרח תוך בדיוק שני צעדים.

ב. זה יתכן. נתן דוגמא של שרשרת שקבוצת מצביה היא של הטבעיים.
נניח שמתקיים עבור כל $i\geq 2$: $P_{i,i-1}=P_{i,i+1}=0.5$ ושמתקיים $P_{1,1}=P_{1,2}=0.5$.
כך כמו בהילוך מקרי סימטרי על כל הישר, בהכרח חוזרים למצב 1, אבל תוחלת זמן החזרה היא אין סוף. אפשר לחזור לראשונה למצב 1 במספר אי זוגי של צעדים רק בצעד אחד.

ג. זה יתכן. נתן דוגמא של שרשרת שקבוצת מצביה היא של כל השלמים.
נניח שמתקיים עבור כל $i\geq 1$: $P_{i,i-1}=0.4=1-P_{i,i+1}$
ועבור כל $i\leq 0$: $P_{i,i-1}=0.5=P_{i,i+1}$.
אם מתחילים במצב 0, אז בהסתברות חצי עוברים למצב 1 וממנו כמו בהילוך מקרי לא סימטרי, לא בהכרח חוזרים למצב 0. לכן מצב 0 הוא חולף. הסיכוי שממצב 0 עוברים למצב -1 הוא חצי. אם ידוע שחזרנו ל 0, אז הסיכוי שעברנו ל -1 הוא אף גדול יותר. כמו בהילוך מקרי סימטרי, תוחלת מספר הצעדים לחזרה ממצב -1 היא אין סוף. לכן בהינתן שחזרנו ל 0, תוחלת מספר הצעדים עד חזרה היא אין סוף.

ד. זה יתכן. נתן דוגמא של שרשרת שקבוצת מצביה היא של השלמים האי שליליים.
נניח שמתקיים $P_{0,1}=1$ ועבור כל $i\geq 1$: $P_{i,i-1}=0.4=1-P_{i,i+1}$.
ניתן לחזור למצב ההתחלתי 0 רק לאחר מספר זוגי של צעדים. ההסתברות להיות במצב 0 לאחר $2n$ צעדים היא $\binom{2n}{n}0.4^n\cdot 0.6^n$. ביטוי זה שואף לאפס מעריכית כאשר $n\to\infty$.

לכן בודאי ההסתברות לחזור לראשונה ב $2n$ צעדים שהיא לא יותר גדולה, שואפת לאפס מעריכית כאשר $n \to \infty$. אך ההסתברות לחזור למצב 0 שווה לקבוע חיובי. לכן, בהיתן שחוזרים, ההסתברות לחזור בשלב מסוים דועכת מעריכית כאשר מספר השלבים שואף לאין סוף. לכן התוחלת המותנה היא סופית.

שלומי