פתרון לבחינה מ 19/07/19

שאלה 1

א. האפשרות הראשונה נכונה. הסדרה מונוטונית לא יורדת כי מצב 0 הוא סופג. אם מגיעים אליו אז נשארים בו תמיד.

הערה

הסדרה עולה ממש כי עבור כל דור יש הסתברות חיובית שבו עדיין לא תהיה הכחדות ובדור הבא תהיה הכחדות.

ב. אף אחת מהאפשרויות לא נכונה. בשלב 2 אי אפשר להיות במצב 8 אך בשלב 3 יש הסתברות חיובית להיות במצב 8, לכן הסדרה אינה מונוטונית לא עולה. מצב 8 הוא לא ארגודי ולכן הוא חולף, לכן ההסתברות הגבולית להיות בו היא אפס, לכן הסדרה לא יכולה להיות מונוטונית לא יורדת (היא חיובית בנקודה מסוימת ושואפת לאפס).

הערה

אם סדרה שואפת לגבול זה לא אומר שהיא מונוטונית.

שאלה 2

א. כן קיימת. נתן דוגמא לשרשרת בעלת קבוצת המצבים $\{1,2\}$ שבה מתקיים $P_{1,2} = P_{2,1} = 1$ והמצב ההתחלתי הוא 1. בשלבים הזוגיים נמצאים במצב 1 ובשלבים האי זוגיים נמצאים במצב 2.

ב. כן קיימת. נתן דוגמא לשרשרת בעלת קבוצת המצבים $\{0,1,2,3\}$ שבה מתקיים $P_{0,1} = P_{1,2} = P_{2,3} = 1$ ומתחילים במצב 0. כך החל משלב 3 נמצאים בהכרח תמיד במצב 3. בשלב 2 נמצאים בהכרח במצב 2.

שאלה 3

א. יהי a הסיכוי להגיע למצב 3 לפני הגעה למצב 0 כאשר נמצאים במצב 1.

יהי b הסיכוי להגיע למצב 3 לפני הגעה למצב 0 כאשר נמצאים במצב 2.

מתקיים

$$\begin{cases} a = 0.5 \cdot 0 + 0.5b \\ b = 0.5a + 0.5 \cdot 1 \end{cases}$$

מתקיים $a = \frac{1}{3}$.

ב. יהי a תוחלת זמן ההגעה למצב 2 כאשר נמצאים במצב 0.

יהי b תוחלת זמן ההגעה למצב 2 כאשר נמצאים במצב 1.

מתקיים

$$\begin{cases} a = 1 + b \\ b = 1 + 0.5a + 0.5 \cdot 0 \end{cases}$$

מתקיים $b = 3$.

ג. התוחלת היא אין סוף. התהליך בזמני הקפיצות הוא הילוך מקרי סימטרי על חצי ישר. לכן כמו שבהילוך מקרי סימטרי תוחלת מספר הצעדים עד הגעה למצב מסוים מכל אחד משכניו היא אינסוף, כך כאן תוחלת מספר הקפיצות עד הגעה למצב 1 היא אינסוף. הזמן בין כל קפיצה לקפיצה הבאה הוא בעל תוחלת 1 ולכן תוחלת הזמן עד הגעה ל 1 היא אין סוף.

ד. הגבול הוא 1 במדויק. אין לשרשרת וקטור סטציונרי. לכל אחד מהמצבים בשרשרת יש הסתברות גבולית של אפס. לכל אחד מ 101 המצבים שלא גדולים מ 100 יש הסתברות גבולית של 0.

כאשר $t \to \infty$ שואפים לגבול. אבל הגבול הוא קבוע.

<u>שאלה 4</u>

<u>א</u>. נתן דוגמא שבה יש התפלגות התחלתית שעבורה לא קיים הגבול וקיימת התפלגות התחלתית שעבורה כן קיים הגבול. מצבי השרשת יהיו $\{1,2\}$ ויתקיים $P_{1,2} = P_{2,1} = 1$. אם מתחילים במצב 1, אז בשלבים הזוגיים נמצאים במצב 1 ובשלבים האי זוגיים נמצאים במצב 2 וכך אין התפלגות גבולית. אם מתחילים בסיכוי שווה בכל אחד משני המצבים, אז בכל שלב נמצאים בסיכוי שווה בכל אחד מהמצבים וכך יש התפלגות גבולית. (הוקטור $(0.5,0.5)$ הוא וקטור סטציונרי, זאת אומרת שהוא מהווה נקודת שבת).

<u>ב</u>. בשרשרת בלתי פריקה נשנית חיובית ובעלת אין סוף מצבים יש התפלגויות התחלתיות שעבורן תוחלת זמן החזרה למצב ההתחלתי היא סופית ויש התפלגויות התחלתיות שעבורן תוחלת זמן החזרה למצב ההתחלתי היא אין סוף.

אם מתחילים בהסתברות 1 במצב מסוים אחד, אז תוחלת זמן החזרה אליו היא 1 חלקי ההסתברות הסטציונרית שלו וזה גודל סופי. אם לעומת זאת מתחילים בהתפלגות הסטציונרית אז תוחלת זמן החזרה למצב ההתחלתי היא $\sum \pi_i \frac{1}{\pi_i} = \sum 1 = \infty$.

דוגמא לשרשרת בלתי פריקה נשנית חיובית בעלת אין סוף מצבים היא שרשרת שמצביה הם כל הטבעיים ולגבי כל זוג מצבים i,j מתקיים $P_{i,j} = 0.5^j$. כך התפלגות זמן החזרה למצב j היא גאומטרית שהיא בעלת תוחלת סופית.

<u>ג</u>. נתן דוגמא של שרשרת בלתי פריקה ולא מחזורית על כל השלמים שבה לא קיים n כזה.

נניח שעבור כל מצב i מתקיים $P_{i,i-1} = P_{i,i} = P_{i,i+1} = \frac{1}{3}$. עבור כל n סופי נתון, לא ניתן להגיע ממצב 0 למצב $n+1$ ב n צעדים.

<u>ד</u>. בהכרח קיים t כזה ואפילו כל $t > 0$ הוא מתאים. מכל מצב לכל מצב אחר קיים מסלול. לגבי כל זמן קפיצה יש לה פונקצית הסתברות מצטברת שהיא חיובית בכל נקודה חיובית. לכן עבור כל t סופי קיימת הסתברות חיובית שסכום זמני הקפיצות במסלול נתון יהיה קטן מ t ובשארית הזמן עד t לא יהיו עוד קפיצות.

שלומי