מועד ב' סמסטר ב' תשע"ט
04.10.19

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בשלושת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N,100\}$.
נמקו את תשובותיכם !
אנא השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה !

<u>שאלה 1</u> (45 נקודות)
יהיו $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ שלוש שרשרות מרקוב.
עבור כל $0 \le n < \infty$ יהי $W_n = (X_n, Y_n)$ (זוג סדור של משתנים).
עבור כל $0 \le n < \infty$ יהי $R_n = X_n + Y_n$.
עבור כל $0 \le n < \infty$ יהי $T_n = X_n + Y_n + Z_n$.
תהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ נקרא ב"ת בתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ אם כל צירוף ערכים שמקבלת כל קבוצת משתנים בסדרה $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ לא משנה את ההסתברות לקבלת כל צירוף ערכים שמקבלת כל קבוצת משתנים בסדרה $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את כל אחת מהטענות הבאות.

<u>א</u>. התהליך $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא שרשרת מרקוב.

<u>ב</u>. אם התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ב"ת בתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ וגם נתון שכל אחד מהם הוא שרשרת מרקוב בלתי פריקה ובלתי מחזורית, אז $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא שרשרת מרקוב בלתי פריקה.

<u>ג</u>. אם התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ב"ת בתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ וגם נתון שכל אחד מהם הוא שרשרת מרקוב בלתי פריקה, בלתי מחזורית ונשנית חיובית, אז $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא שרשרת מרקוב בלתי פריקה ונשנית חיובית.

<u>ד</u>. אם התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ב"ת בתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ אז התהליך $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא שרשרת מרקוב.

<u>ה</u>. אם שלושת התהליכים $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ הם נשנים והתהליך $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא שרשרת מרקוב, אז הוא נשנה.

שאלה 2 (18 נקודות)
יהיו $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ שני תהליכי הסתעפות.
נניח שבשני התהליכים התפלגות מספר הצאצאים של כל פרט זהה להתפלגות של אותו משתנה Z. נניח שהתהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ב"ת בתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$.
נניח שמתקיים $(X_0 = Y_0 = 1)$.

א. האם יתכן שיתקיים $E(Z) = \infty$ ושהתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ יגיע להכחדות בהסתברות גדולה מ 0.5 ?

ב. האם יתכן שההסתברות שיהיה שלב n שבו $(X_n = 0, Y_n > 0)$ תהיה קרובה ל 0.5 כרצוננו ?

שאלה 3 (45 נקודות)
נתונה תחנת שרות שבה שרת בודד ואין סוף מקומות המתנה. בכל זמן שבו יש לקוחות בתחנה, השרת נותן שרות לאחד מהם. משך כל שרות מתפלג $exp(1)$. לתחנה מגיעים לקוחות בזרם פואסוני בעל עצמה λ. כל לקוח שמגיע לתחנה בזמן שהשרת עסוק, מצטרף לתור הממתינים לשרות. נניח שהתחנה נפתחת בזמן 0 ואז מתחילים להגיע לקוחות.
יהי $r_0 = 0$. עבור כל $1 \le n < \infty$ יהי r_n זמן ההגעה של הלקוח ה- n (זאת אומרת, זמן ההגעה של הלקוח שבדיוק $n-1$ לקוחות הגיעו לפניו).
עבור כל $1 \le n < \infty$ יהי $w_n = r_n - r_{n-1}$.
עבור כל $1 \le n < \infty$ יהי $q_n = |r_n - 8|$.
עבור כל $1 \le n < \infty$ יהי $m_n = min_{1 \le i \le n}\{w_i\}$.

א. נניח שבכל שלב שבו מתקבל לקוח לשרות הוא נבחר בסיכוי שווה מבין הלקוח שיש לו ערך r_n מינימלי מבין הממתינים בשלב זה והלקוח שיש לו ערך r_n מכסימלי מבין הממתינים בשלב זה, וזאת באופן ב"ת בקורה בשלבים האחרים.
עבור אילו ערכי λ הלקוח שהגיע שני לתחנה יתקבל לשרות בודאות באיזשהו שלב ?

ב. נניח שבכל שלב שבו מתקבל לקוח לשרות, זהו הלקוח בעל ערך r_n מכסימלי מבין הממתינים לשרות בזמן זה.
עבור אילו ערכי λ הלקוח שהגיע שני לתחנה יתקבל לשרות בודאות באיזשהו שלב ?

ג. נניח שבכל שלב הלקוח שמתקבל לשרות הוא בעל ערך w_n מינימלי מבין הממתינים לשרות בזמן זה.
עבור אילו ערכי λ הלקוח שהגיע שני לתחנה יתקבל לשרות בודאות באיזשהו שלב ?

ד. נניח שבכל שלב הלקוח שמתקבל לשרות הוא בעל ערך q_n מכסימלי מבין הממתינים לשרות בזמן זה.
עבור אילו ערכי λ הלקוח שהגיע שני לתחנה יתקבל לשרות בודאות באיזשהו שלב ?

ה. האם על הסדרה $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ חל החוק החזק של המספרים הגדולים ?
