מועד א' סמסטר ב' תש"פ
21.07.20

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בארבעת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N,100\}$.
נמקו את תשובותיכם !

בהצלחה !

שאלה 1 (27 נקודות)
נתונה שרשרת מרקוב בעלת קבוצת המצבים $\{1,2,3\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{bmatrix}$$

א. האם קיים $\lim_{n\to\infty} P_{1,1}^{(2n)}$?

ב. מצאו בדרך ראשונה את תוחלת זמן החזרה הראשונה למצב 1, כאשר מתחילים במצב 1.
אם משתמשים במערכת משוואות, אז אין צורך לפתור אותה.

ג. מצאו בדרך שניה את תוחלת זמן החזרה הראשונה למצב 1, כאשר מתחילים במצב 1.
אם משתמשים במערכת משוואות, אז אין צורך לפתור אותה.

שאלה 2 (18 נקודות)
שני תהליכים סטוכסטיים נקראים ב"ת אם שום צירוף ערכים שמקבלת קבוצת משתנים של אחד מהם לא משנה את הסיכויים של שום קבוצת משתנים בתהליך האחר לקבלת צירוף ערכים מסוימים.

יהיו $\{X(t)\}$ ו $\{Y(t)\}$ שני תהליכי פואסון ב"ת. נניח שהקצב של כל אחד מהם הוא 1.
עבור כל $t \geq 0$, יהי $W(t) = X(t)Y(t)$ ויהי $Z(t) = 2^{X(t)}3^{Y(t)}$.

א. האם התהליך $\{W(t)\}$ הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף ?

ב. האם התהליך $\{Z(t)\}$ הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף ?

שאלה 3 (27 נקודות)
קיימות תחנות שרות. לכל תחנה מגיעים צרכנים בזרם פואסוני בקצב 1. בכל תחנה יש שרת אחד שנותן שרות שמשכו מתפלג מעריכית עם פרמטר 1. אין מקומות המתנה בתחנות. כך חלק מהצרכנים שמגיעים לתחנות נדחים. קבוצת זמני ההגעה של צרכנים לתחנות השונות, ומשכי השרות בתחנות השונות היא קבוצת משתנים ב"ת.
נשקלת אפשרות לאחד n תחנות שרות מסוג זה. כאשר מאחדים תחנות אז לתחנה המאוחדת מגיעים הלקוחות שהיו מגיעים לתחנות הנפרדות. השרתים של התחנה המאוחדת ממוספרים בין 1 ל n (לכל אחד מהם יש מספור שונה). כל צרכן שמגיע לתחנה המאוחדת פונה לקבלת שרות אצל השרת בעל המספור הנמוך ביותר מבין השרתים הפנויים בזמן הגעתו. אם הוא מוצא את כל השרתים עסוקים, אז הוא נדחה.

א. פי כמה ניתן להקטין את אחוז הצרכנים הנדחים לאורך זמן, אם מאחדים שתי תחנות ?

ב. האם פרופרצית הצרכנים הנדחים תשאף לגודל קטן מ 0.2 כאשר $n \to \infty$?

ג. נסתכל על קבוצת הצרכנים שיקבלו שרות בתחנה מאוחדת. מבין צרכנים אלה, למה ישאף לאורך זמן אחוז הצרכנים שיקבלו שרות מ $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ השרתים בעלי המספור הנמוך ביותר כאשר $n \to \infty$?
הביטוי $\lfloor a \rfloor$ מסמן כרגיל את החלק השלם של a. כך $8 = \lfloor 8.2 \rfloor$.

שאלה 4 (36 נקודות)
תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת קבוצת המצבים של כל הטבעיים ומצב התחלתי 1.
קבוצה לא ריקה A של מספרים טבעיים תקרא כאן "חלוקה" אם היא קבוצה חלקית ממש של המספרים הטבעיים. כמקובל נסמן ב A^c את הקבוצה המשלימה ל A.
נגדיר תהליך סטוכסטי $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ בעל קבוצת המצבים $\{a, b\}$ לפי

$$Y_n = \begin{cases} a & X_n \in A \\ \\ b & X_n \in A^c \end{cases}$$

א. האם קיימת שרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שכל מצביה חולפים, כך שקיימות אין סוף חלוקות שעבורן $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב ?

ב. האם קיימת שרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ בלתי פריקה ונשנית חיובית, כך שעבור כל חלוקה A, $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב ?

ג. האם קיימת שרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ בלתי פריקה ונשנית חיובית, כך שקיימות מספר סופי של חלוקות שעבורן $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב, אך לא קיימות אין סוף חלוקות שעבורן $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב ?

ד. האם קיימת שרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ בלתי פריקה ונשנית אפס, כך שעבור החלוקה $A = \{1\}$, $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב ?

בכל מקרה שבו קיימת שרשרת מתאימה, יש לתאר שרשרת כזאת.
