פתרון לבחינה מ 21.07.20

שאלה 1

א. הגבול קיים. למצב 1 ניתן לחזור בשני צעדים וניתן גם לחזור אליו בשלושה צעדים. לכן הוא לא מחזורי. לכן קיים הגבול ששווה ל 1 חלקי תוחלת זמן החזרה אליו. אם קיים גבול יחיד לסדרה אז קיים גבול לכל תת סדרה שלה.

ב. נחשב באופן ישיר. יהיו e_1, e_2, e_3 – תוחלות זמני ההגעה למצב 1 מהמצבים השונים. מתקיים

$$\begin{cases} e_1 = 1 + 0.1e_2 + 0.9e_3 \\ e_2 = 1 + 0.2 \cdot 0 + 0.3e_2 + 0.5e_3 \\ e_3 = 1 + 0.1 \cdot 0 + 0.6e_2 + 0.3e_3 \end{cases}$$

ג. נשתמש בכך ש $e_1 = \frac{1}{\pi_1}$. מתקיים

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.2\pi_2 + 0.1\pi_3 \\ \pi_2 = 0.1\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.6\pi_3 \\ \pi_3 = 0.9\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.3\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

שאלה 2

א. התהליך אינו שרשרת מרקוב.
אם המכפלה נמצאת במצב 6 אז יתכן שתהליך אחד מהמקוריים נמצא במצב 6 והאחר נמצא במצב 1. כך המכפלה יכולה לעבור למצב 7. אבל אם ידוע שהגענו למצב 6 ישירות ממצב 4 אז למרות שהיא שווה 6 כעת, ברור שהיא לא תוכל לעבור למצב 7 כי כבר כל אחד מהתהליכים המקוריים מקבל ערך גדול מ 1. לכן ההסטוריה הקודמת היא רלוונטית.
דרך אחרת להסביר שזו אינה שרשרת מרקוב היא לפי העדר הומוגניות בזמן. בזמן 0 צריכים ארועים בשני התהליכים המקוריים כדי לעזוב את מצב 0. בזמן מתקדם יותר יתכן שהמכפלה שווה לאפס, אבל אחד מהתהליכים הקודמים כבר לא שווה לאפס. למעשה גם זמן העזיבה של מצב 0 גם לא מתפלג מעריכית: הסיכוי שבזמן באורך h יקרה יותר מאירוע אחד הוא $o(h)$.
<u>הערה</u>
כשבודקים אם תהליך מסוים הוא שרשרת מרקוב, אסור לעשות הנחות על ערכי משתנים של תהליך אחר, אבל מותר לפענח את ערכיהם לפי ערכים שמקבל התהליך הנדון.

ב. התהליך הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף.
מערכו של $Z(t)$ ניתן לפענח את ערכם של כל אחד משני התהליכים המקוריים ומהם את עוצמות המעברים למצבים השונים.

שאלה 3

א. לשרשרת המתארת את הקורה בתחנה של שרת אחד יש שני מצבים 0 ו 1. הנדחים הם אלה שמגיעים כאשר נמצאים במצב 1. אחוז הנדחים הוא π_1. היוצר האינפיניטיסימלי הוא

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

מתקיים $\pi_1 = 0.5$.
אם יש כמה שרתים בעלי אותו קצב שרות בתחנה אז אחוז הנדחים לא מושפע מלמי הצרכנים מעדיפים לפנות. פרופורצית הנדחים שווה להסתברות הסטציונרית של מצב 2 בשרשרת בעלת המצבים 0,1,2. היוצר האינפיניטיסימלי הוא

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

מתקיים

$$\begin{cases} 2\pi_0 = \pi_1 \\ 3\pi_1 = 2\pi_0 + 2\pi_2 \\ 2\pi_2 = 2\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

מתקיים $\pi_2 = 0.4$.
לכן האיחוד מקטין את פרופורצית הנדחים מ 0.5 ל 0.4 .

ב. נראה שהיא תשאף לאפס. צרכנים נדחים רק כאשר כל n השרתים עסוקים. נסתכל על השרשרת המתארת את מספר השרתים העסוקים (ששווה גם למספר הצרכנים שבתחנה). בשרשרת זו נכנסים ישירות למצב רק משכניו ויוצאים ישירות ממצב רק לשכניו. לכן חל על השרשרת תנאי האיזון המפורט. נראה שעבור כל a טבעי קבוע, מתקבל ערך לא גדול מ $\frac{1}{a}$ כאשר $n \to \infty$. נסתכל על היחסים בין ההסתברויות הסטציונריות של a המצבים $n, n-1, n-2, n-a+1$. עבור כל $n-a+1 \le i \le n-1$ מתקיים $n\pi_i = (i+1)\pi_{i+1}$. לכן כאשר $n \to \infty$ היחסים בין ההסתברויות הסטציונריות של כל זוג מהמצבים האלה שואפת ל 1.

ג. יש שאיפה לחצי. מכיון ששכיחות הזמן שהתחנה מלאה היא אפס, אז פרופורצית הצרכנים שזוכים להיות משורתים היא 1. קבוצה של מחצית מהשרתים לא תוכל לשרת יותר ממחצית הזרם.

שאלה 4

א. נתאר שרשרת מתאימה.
נניח שמכל מצב אי זוגי עוברים ישירות למצב 2 בהסתברות 1 ומכל מצב $2n$ עוברים ישירות למצב $2n+2$ בהסתברות 1. כל המצבים הם לא ארגודים ולכן הם חולפים. בקבוצה A ניתן לכלול את מצב 1 וכל תת קבוצה של המצבים האי זוגיים. מכל מצב עוברים בהסתברות 1 למצבים הזוגיים.

ב. נתאר שרשרת מתאימה.
נניח שעבור כל זוג מצבים i, j מתקיים $P_{i,j} = 0.5^j$. התפלגות זמן החזרה למצב j היא $G\left(0.5^j\right)$ ותוחלת זמן החזרה לכל מצב היא סופית ולכן המצבים הם נשנים חיובית. בתהליך $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ לגבי כל קבוצת מצבים, בכל שלב עוברים אליה באותה הסתברות באופן ב"ת בשלבים האחרים.

ג. נתאר שרשרת מתאימה.
נניח שמתקיים עבור כל $i \ge 2$: $P_{i,1} = 1$, $P_{1,i} = 0.5^{i-1}$. השרשרת בלתי פריקה ולמצב 1 חוזרים בודאות בשני צעדים. לכן המצבים נשנים חיובית. אם המצב 1 נמצא בקבוצה נפרדת מיתר המצבים אז בשרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ עוברים בודאות מכל מצב למצב האחר. אם יש בקבוצה של מצב 1 עוד מצבים, אז בתהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ אין הומוגניות בזמן כי התקופה תקבע את הסיכוי לעבור בשלב הבא לקבוצה A. התקופה מגלה אם נמצאים במצב 1 או במצב אחר מהקבוצה A.

ד. לא קיימת חלוקה כזאת.
מכיון שמצב 1 הוא נשנה, אז קיים שלב סופי שבו ניתן לחזור אליו כאשר נמצאים במצב אחר שאליו עזבנו. אבל אם היתה אותה הסתברות חיובית לחזור אליו ממצבים אחרים בכל שלב, אז תוחלת זמן החזרה אליו היתה סופית, והוא היה נשנה חיובי.

שלומי