

**בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים**

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

יש להגיש את הבחינה עד שעה 12:30 באתר המודל.  
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.  
בארבעת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.  
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות.  
נמקו את תשובותיכם!

בהצלחה!

---

---

**שאלה 1** (36 נקודות)

תהי  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  סדרת משתנים מקריים.  
תהי  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  סדרת המשתנים המקריים  $X_0, X_1, X_3, X_4, \dots$  (מדלגת רק על  $X_2$ ).  
תהי  $\{Z_m\}_{m=0}^{\infty}$  סדרת המשתנים המקריים המקיימת  $Z_m = \sum_{n=0}^m X_n$  לכל  $m$  שלם אי שלילי.

- א.** האם יתכן שהתהליך  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  לא יהיה שרשרת מרקוב, אך התהליך  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  כן יהיה שרשרת מרקוב?
- ב.** האם יתכן שהתהליך  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  יהיה שרשרת מרקוב, אך התהליך  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  לא יהיה שרשרת מרקוב?
- ג.** האם יתכן שהתהליך  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  לא יהיה שרשרת מרקוב, אך התהליך  $\{Z_m\}_{m=0}^{\infty}$  כן יהיה שרשרת מרקוב?
- ד.** האם יתכן שהתהליך  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  לא יהיה שרשרת מרקוב, אך כל סדרה אינסופית חלקית ממש של הסדרה  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  כן תהיה שרשרת מרקוב?

בכל מקרה שבו משהו יתכן, יש לתת דוגמא מנומקת שמראה זאת.

---

---

**שאלה 2** (18 נקודות)

תהי  $\{X(t)\}$  מערכת תור עם שרת אחד ואין סוף מקומות המתנה. נניח שמופע הצרכנים לתור הוא פואסוני בעל עוצמה 1. נניח שזמן שרות של צרכן מתפלג  $exp(2)$ , וזאת באופן ב"ת בין הצרכנים השונים.

תהי  $\{Y(t)\}$  מערכת תור עם שרת אחד ואין סוף מקומות המתנה. נניח שמופע הצרכנים לתור הוא פואסוני בעל עוצמה 1. נניח שזמן שרות של צרכן מתפלג  $exp(2)$ , וזאת באופן ב"ת בין הצרכנים השונים.

עבור כל  $t \geq 0$  יהי  $Z(t) = X(t) + Y(t)$ .

- א.** נניח ששני התהליכים  $\{X(t)\}$  ו  $\{Y(t)\}$  הם ב"ת. מהו  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(Z(t) = 1)$  ?
- ב.** נניח שכל צרכן עובר למערכת התור האחרת כאשר זה כדאי לו. מהו כעת  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(Z(t) = 1)$  ?
- 

**שאלה 3** (27 נקודות)

יהי  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  תהליך הסתעפות שבו מספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כמו  $Z$ , כאשר מתקיים  $P(Z = k) = 0.5^{k+1}$  לכל  $k \geq 0$ .

יהי  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  תהליך הסתעפות שבו מספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כמו  $W$ , כאשר מתקיים  $P(W = k) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k$  לכל  $k \geq 0$ .

נניח שמתקיים  $X_0 = Y_0 = 1$ .

- א.** מהו  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0)$  ?
- ב.** מהו  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n = 0)$  ?
- ג.** מהו  $P(X_2 = 1)$  ?
- 

**שאלה 4** (27 נקודות)

יהי  $\{X(t)\}$  תהליך פואסון בעל קצב 1. יהי  $\{Y(t)\}$  תהליך פואסון בעל קצב 1. נניח ששני התהליכים הם ב"ת.

- א.** למה שואפת כאשר  $t \rightarrow \infty$  ההסתברות ש  $\frac{X(t)-Y(t)}{3}$  הוא מספר שלם ?
- ב.** מהו  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t + t^{0.1}) > Y(t))$  ?
- ג.** למה שואפת כאשר  $k \rightarrow \infty$  ההסתברות שלכל  $t \geq 0$  יתקיים  $X(t + k) > Y(t)$  ?
-