פתרון לבחינה מ 30.09.20

שאלה 1

א. נתן דוגמא מתאימה.
נניח ש $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא סדרת הטלות של מטבע הוגן. נניח ש X_2 ו X_8 הן העתק של אותה הטלה וכל אחת מיתר ההטלות ב"ת בכל ההטלות האחרות. X_2 נותן אינפורמציה על X_8 שלא נמצאת ב X_7. לכן לא מתקיימת תכונת המרקוביות לגבי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$. הסדרה $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא סדרת משתנים ב"ת שווי התפלגות.

ב. נתן דוגמא מתאימה.
נניח ש$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא הילוך מקרי על הישר. הסדרה $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ אינה הומוגנית בזמן.
$$P(X_3 = 1|X_1 = 1) > 0 = P(X_6 = 1|X_5 = 1)$$

ג. נתן דוגמא מתאימה.
נניח ש $P(X_0 = \sqrt{2}) = P(X_0 = 0) = 0.5$. בהינתן $X_0 = 0$ אז המשתנים הבאים הם סדרת משתנים ב"ת שכל אחד מהם מקבל בסיכוי שווה את הערכים 0 ו 1. בהינתן $X_0 = \sqrt{2}$ אז כל המשתנים הבאים שווים ל 0 בהסתברות 1. המשתנים שלפני המשתנה הקודם נותנים אינפורמציה נוספת לגבי ההתפלגות של משתנה. לכן הסדרה $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ אינה מרקובית. אבל הסכום המצטבר מגלה את המקדם של $\sqrt{2}$ בסכום, וכך נותן את כל האינפורמציה שאפשר לקבל על התפלגות המשתנה.

ד. זה בלתי אפשרי.
אם סדרה אינה שרשרת מרקוב אז קיים מקום n כך שמשתנים קודמים ל X_{n-1} או התקופה, נותנים אינפורמציה נוספת לגבי התפלגות X_n. אם נבחר תת סדרה חלקית ממש שכוללת את כל המשתנים עד X_n אז אותה אינפורמציה נוספת תמשיך להתקיים.

שאלה 2

א. כל אחת ממערכות התורים היא שרשרת מרקוב בעלת יוצר המקיים $\lambda_{i,i+1} = 1$ לכל $i \geq 0$ ומקיים $\lambda_{i,i-1} = 2$ לכל $i \geq 1$. קיים וקטור סטציונרי שמקיים את תנאי האיזון המפורט. מתקיים $\pi_i = 0.5^{i+1}$. כדי שבשתי המערכות יהיה בסך הכל צרכן אחד, צריך שאחת תהיה ריקה ובאחרת יהיה צרכן אחד. ההסתברות הגבולית לכך היא $2 \cdot 0.5 \cdot 0.5^2$.

ב. למעשה זו כעת מערכת תור של שני שרתים ואין סוף מקומות המתנה. מתקיים $\lambda_{i,i+1} = 2$ לכל $i \geq 0$. מתקיים $\lambda_{1,0} = 2$ ומתקיים $\lambda_{i,i-1} = 4$ לכל $i \geq 2$. גם כאן מתקיים תנאי האיזון המפורט ומתקיים $\pi_1 = \frac{1}{3}$.

שאלה 3

א. התפלגות מספר הצאצאים של כל פרט היא גיאומטרית מוזזת בעלת תוחלת $\frac{1}{0.5} - 1 = 1$. כאשר תוחלת מספר הצאצאים היא 1 והתהליך אינו מנוון, אז יש הכחדות בודאות.

ב. תוחלת מספר הצאצאים של כל פרט היא $\frac{1}{1/3} - 1 = 2$. היא גדולה מ 1 ולכן נחפש את הפתרון החיובי הקטן של המשוואה $g(t) = t$. מתקיים
$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k t^k = \frac{1/3}{1 - 2/3\, t} = \frac{1}{3 - 2t}$$

הפתרון המבוקש הוא $t = 0.5$.

ג. הסתברות המבוקשת מתקבלת על-ידי הצבת 0 בנגזרת של הפונקציה היוצרת של X_2.
מתקיים $g_{X_1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 0.5^{k+1} t^k = \frac{0.5}{1-0.5t} = \frac{1}{2-t}$.
מתקיים $g_{X_2}(t) = g_{X_1}\left(g_{X_1}(t)\right) = \frac{1}{2-\frac{1}{2-t}} = \frac{2-t}{3-2t}$.
הנגזרת היא $\frac{1}{(3-2t)^2}$. נציב בה 0 ונקבל $\frac{1}{9}$.

שאלה 4

א. נסתכל על התהליך המתאר את שאריות החלוקה ב 3 של $X(t) - Y(t)$.
לתהליך זה יש שלושה מצבים $\{0,1,2\}$ ויוצר אינפיניטיסימלי
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
יש וקטור סטציונרי שכל רכיביו שווים. לכן ההסתברות הגבולית היא $\frac{1}{3}$.

ב. עבור ערכי t גדולים, ההפרש $X(t+t^{0.1}) - Y(t)$ מתפלג בקירוב נורמלית עם תוחלת $t^{0.1}$ וסטיית תקן $\sqrt{t + t^{0.1} + t}$. לכן הגבול הוא חצי.

ג. עבור כל k קבוע, מטריצת המעבר בזמני הקפיצות של התהליך $X(t+k) - Y(t)$ זהה לשל מטריצת המעבר של הילוך מקרי סימטרי על הישר. לכן כל המצבים הם נשנים. לכן עבור כל ערך סופי של k בהסתברות אפס ההפרש יהיה תמיד חיובי. ההסתברות היא אפס עבור כל קבוע, ולכן הגבול הוא אפס.

שלומי