

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.

אסור השימוש בכל חומר עזר. אסור השימוש במחשבי כיס.
בחמש השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.

נמקו את תשובותיכם!

בסעיפים בהם אתם טוענים שמהשוויון יתכן, יש להביא דוגמא מנומקת שמראה שהדבר יתכן.

בהצלחה!

שאלה 1 (9 נקודות)

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב של הילוך מקרי על הישר שבו בכל שלב עושים צעד ימינה בסיכוי 0.2 וצעד שמאלה בסיכוי 0.8.
מהי תוחלת מספר הצעדים עד להגעה למצב 0 כאשר מתחילים במצב 2?

שאלה 2 (18 נקודות)

א. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

בשרשרת מרקוב בת שני מצבים כל וקטור סטציונרי מקיים את תנאי האיזון המפורט.

ב. מהו המספר המינימלי של מצבים שצריכים להיות בשרשרת מרקוב בזמן בדיד כדי

שיהיו בה גם אין סוף וקטורים סטציונרים שמקיימים את תנאי האיזון המפורט וגם

יהיו בה אין סוף וקטורים סטציונרים שלא מקיימים את תנאי האיזון המפורט?

שאלה 3 (27 נקודות)

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בלתי פריקה שקבוצת מצביה היא של כל השלמים האי שליליים.

א. האם יתכן שמתקיים $P_{i,0} > 0$ לכל $i > 0$ ו 0 מצב חולף?

ב. האם יתכן שמתקיים $\sum_{i=0}^{\infty} P_{i,0} < 0.5$ ו 0 מצב נשנה חיובי?

ג. האם יתכן שמתקיים $\sum_{i=0}^{\infty} P_{i,0} < 0.5$ ו 0 מצב נשנה אפס?

שאלה 4 (18 נקודות)

יהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות. נניח שמספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כמו שמתפלג המשתנה המקרי Z . נניח שמתקיים $(X_0 = 1)$.

א. האם יתכן שמתקיים $E(Z) < 2$ ו $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0) < 0.1$?

ב. האם יתכן $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n < X_n < n + \sqrt{n}) > 0.6$?

שאלה 5 (36 נקודות)

יהי $X(t)$ תהליך פואסון בעל קצב 1.

א. האם קיים תהליך סטוכסטי $Y(t)$, כך שמתקיים $X(t) = Y(t^2)$ לכל $t \geq 0$?

ב. מהי ההסתברות שיהיה מצב אי שלילי שבו נשהה פחות זמן מאשר בכל מצב אחר? (זאת אומרת, שהביקור בו יהיה קצר יותר מאשר כל ביקור במצב אחר).

יש לי אפשרות לצפות בתהליך במשך זמן כולל של לכל היותר דקה אחת מתוך שתי הדקות הראשונות שבהן התהליך מתרחש. מותר לי לחלק את הדקה הזאת לכל חלוקה סופית של פרקי זמן שסכומם הוא דקה אחת. בזמן שאני צופה בתהליך ורק בזמן זה אני רואה את הקפיצות של התהליך ואני רואה את ערכי התהליך. אני רואה קפיצה ממצב k למצב $k + 1$ רק אם אני צופה בתהליך בזמן קפיצה זו. אני רואה את הערך k אם התהליך $X(t)$ מקבל את הערך הזה לפחות בחלק מהזמן שבו אני צופה בתהליך.

ג. האם קיימת חלוקה סופית של הדקה שבה אני אצפה בתהליך כך שתוחלת מספר הקפיצות של התהליך שאותם אראה, תהיה גדולה יותר מאשר בכל חלוקה סופית אחרת?

ד. האם קיימת חלוקה סופית של הדקה שבה אני אצפה בתהליך כך שתוחלת מספר ערכי התהליך שאותם אראה, תהיה גדולה יותר מאשר בכל חלוקה סופית אחרת?