

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.

אסור השימוש בכל חומר עזר. אסור השימוש במחשבי כיס.
בארבע השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!
בסעיפים בהם אתם טוענים שמהשוויתן, יש להביא דוגמא מנומקת שמראה שהדבר יתכן.

בהצלחה!

שאלה 1 (45 נקודות)

תהי $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים המקיימים $E(|X_i|) < \infty$.
בסעיפים א, ב, ג נניח שמתקיים עבור כל $0 \leq n < \infty$ ועבור כל סדרת ערכים אפשריים $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$E(X_{n+1} | X_n = a_n, X_{n-1} = a_{n-1}, \dots, X_0 = a_0) = a_n$
בסעיפים ד, ה נניח שמתקיים עבור כל $0 \leq n < \infty$ ועבור כל סדרת ערכים אפשריים $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$E(X_{n+1} | X_n = a_n, X_{n-1} = a_{n-1}, \dots, X_0 = a_0) > a_n$

- א. האם יתכן שלגבי הסדרה $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ לא חלה תכונת המרקוביות?
ב. האם יתכן שהסדרה $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ מקיימת את תכונת המרקוביות, אבל היא אינה שרשרת מרקוב?
ג. האם יתכן שמתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n|) = \infty$?
ד. האם יתכן שהסדרה $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב נשנית אפס?
ה. האם יתכן שהסדרה $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב נשנית חיובית?

שאלה 2 (9 נקודות)

יהי $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות. נניח שמספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כפי ש Z מתפלג, כאשר מתקיים

$$P(Z = 2) = 0.25, P(Z = 1) = 0.25, P(Z = 0) = 0.5$$

נניח שמתקיים $(X_0 = 1)$.

האם תוחלת מספר הדורות עד הגעה למצב סופג היא סופית?

שאלה 3 (9 נקודות)

יהי $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ הילוך מקרי סימטרי על הישר. נניח שמתקיים $(X_0 = 3)$.
איך מתפלג מספר הביקורים במצב 1 עד שמגיעים למצב 0?

שאלה 4 (45 נקודות)

תהי $\{X(t)\}$ שרשרת מרקוב בזמן רציף בעלת קבוצת המצבים $\{1,2,3,4\}$ ויוצר אינפיניטיסימלי

-3	1	1	1
1	-3	1	1
1	1	-3	1
1	1	1	-3

נניח שמתקיים $(X(0) = 1)$.

א. מהי ההסתברות שבקפיצה השנייה של התהליך הוא יגיע למצב 1?

ב. מהו $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = 2)$?

ג. מהו $P(X(2) = 1)$?

תנו תשובה מפורשת. בססו את תשובתכם ללא שימוש במשוואות דיפרנציאליות.

ד. מהי ההסתברות שעד נקודת זמן 1.5 התהליך לא יגיע בשום שלב למצבים 2 ו 3?

ה. מהי ההסתברות שמספר הקפיצות המצטברות ממצב 2 למצב 3 אף פעם לא יהיה

קטן ממספר הקפיצות המצטברות ממצב 2 למצב 4?
