

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.

אסור השימוש בכל חומר עזר. אסור השימוש במחשבי כיס.
בארבע השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!
בסעיפים בהם אתם טוענים שמהשוויתן, יש להביא דוגמא מנומקת שמראה שהדבר יתכן.

בהצלחה!

שאלה 1 (27 נקודות)

נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ בעלת קבוצת המצבים $\{1, 2, 3\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

נניח שמתקיים $(X_0 = 1)$.

יהי $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות שבו מספר הצאצאים של כל פרט מתפלג כמו שמתפלג Z .

נניח שמתקיים $P(Z = 0) = \frac{1}{3} = 1 - P(Z = 2)$.

נניח ש Y_0 מקבל את הערך שמקבל X_{100} .

א. מהי תוחלת מספר הצעדים עד שהתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ יגיע למצב נשנה?

ב. מהו בקירוב $E\left(\frac{X_{100}}{X_{200}}\right)$?

הערה

יש לנמק ולתת ביטוי שכל חלקיו הם מספרים. אין צורך להגיע לתשובה סופית.

ג. מהו בקירוב $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n = 0)$?

הערות

הכוונה היא למצוא מהי בקירוב ההסתברות להכחדות.
יש לנמק ולתת ביטוי שכל חלקיו הם מספרים. אין צורך להגיע לתשובה סופית.

שאלה 2 (18 נקודות)

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב שקבוצת מצביה היא A . נניח ש 0 הוא אחד ממצבי שרשרת זו. נניח שקיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{0,j}^{(n)}$ עבור כל מצב $j \in A$.

א. האם יתכן שמתקיים $\sum_{j \in A} \lim_{n \rightarrow \infty} P_{0,j}^{(n)} < \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in A} P_{0,j}^{(n)}$?

ב. האם יתכן שמתקיים $\sum_{j \in A} \lim_{n \rightarrow \infty} P_{0,j}^{(n)} = 0.5$?

שאלה 3 (36 נקודות)

תזכורת

$f_{i,j}^{(k)}$ היא ההסתברות להגיע ממצב התחלתי i למצב j לראשונה בשלב ה- k .

$f_{i,i}^{(k)}$ היא ההסתברות לחזור למצב ההתחלתי i לראשונה בשלב ה- k .

א. נניח ש 0 ו 1 הם שני מצבים נשנים באותה מחלקה בלתי פריקה.

האם יתכן שיתקיים $\sum_{k=1}^n f_{0,1}^{(k)} < 1$ עבור כל n שלם ?

ב. נניח ש 0 הוא מצב נשנה בשרשרת מרקוב בזמן בדיד. האם יתכן שיתקיים

$$f_{0,0}^{(8)} > 0.9 ?$$

ג. נניח ש 0 הוא מצב חולף בשרשרת מרקוב בזמן בדיד. האם יתכן שיתקיים

$$f_{0,0}^{(8)} > 0.9 ?$$

ד. נניח ש 0 הוא מצב התחלתי בשרשרת מרקוב בזמן רציף.

האם יתכן שבהסתברות גדולה מ 0.9 נחזור למצב 0 לראשונה לאחר זמן שגדול

מ 7 וקטן מ 9 לאחר שנעזוב את מצב 0 לראשונה ?

שאלה 4 (27 נקודות)

החל מזמן 0 מגיעים לקוחות לתחנת שרות בזרם פואסוני בעל קצב $\lambda > 0$. בתחנה יש שני שרתים ושמונה מקומות המתנה. כל שרת יכול לשרת ברגע נתון לקוח אחד.

קצב השרות של כל שרת הוא מעריכי עם פרמטר 1 .

לקוח המגיע לתחנה כאשר יש לפחות שרת אחד פנוי, מתקבל מיידית לשרות על-ידי שרת פנוי. לקוח המגיע כאשר שני השרתים עסוקים, מצטרף לממתינים לשרות, אם באותו רגע אין יותר משבעה ממתינים. אם יש באותו רגע שמונה ממתינים, אז הוא נדחה ועוזב מיידית את התחנה.

א. האם יתכן שלאורך זמן אחוז הלקוחות הנדחים יהיה גדול מ 0.9 ?

ב. מהי ההסתברות שהלקוח השני שיגיע לתחנה יהיה הראשון שיעזוב אותה ?

ג. האם יתכן שלתהליך בזמני הקפיצות של התהליך המתאר את מספר הלקוחות

שבתחנה בזמנים השונים, תהיה התפלגות גבולית ?
