© כל הזכויות שמורות
מסמך זה נכתב על-ידי שלומי.
אין להעתיקו או להציגו מחוץ לאתר של שלומי.

# פתרון לבחינה מ 21.07.22

**שאלה 1**

**א.** התוחלת של משתנה גיאומטרי בעל פרמטר $0.3 + 0.1$ שהיא $2.5$ .
זה גם הפתרון של המשוואה $e = 1 + 0.6e + 0.1 \cdot 0 + 0.3 \cdot 0$ .

**ב.** מחלקת המצבים הנשנים היא לא מחזורית. כל אחד משני המשתנים $X_{100}$ ו $X_{200}$ הוא בעל התפלגות קרובה להתפלגות הסטציונרית שהיא $(0,0.3,0.7)$. התלות בין שני המשתנים היא קטנה. התוחלת המבוקשת היא בקירוב

$$0.3 \cdot 0.3 \cdot \frac{2}{2} + 0.7 \cdot 0.7 \cdot \frac{3}{3} + 0.3 \cdot 0.7 \cdot \frac{2}{3} + 0.7 \cdot 0.3 \cdot \frac{3}{2}$$

הערות

שני המשתנים אינם לגמרי בלתי תלויים. אם למשל $X_{200}$ שווה ל 1, אז בהכרח גם $X_{100}$ שווה ל 1.

מהרגע שמגיעים למחלקה של נשנים, בכל שלב נמצאים במצב 2 בסיכוי 0.3 ובמצב 3 בסיכוי 0.7 . לכן אין צורך לפתור מערכת משוואות כדי להגיע למסקנה שהוקטור הסטציונרי הוא $(0,0.3,0.7)$ .

כאשר זוג משתנים הם ב"ת אז מתקיים $E\left(\frac{X}{Y}\right) = E(X)E\left(\frac{1}{Y}\right)$. זו דרך נוספת לפתור את הסעיף. אבל לא מתקיים $E\left(\frac{X}{Y}\right) = E(X)/E(Y)$.

לא יתכן שכאן תוחלת המנה היא קרובה ל 1 כי ממוצע של כל מספר חיובי שונה מ 1 עם ההופכי שלו הוא גדול מ 1.

שימו לב להבדל בין משתנים שווי התפלגות שלגביהם יש את אותה חוקיות, אבל הם לא בהכרח מקבלים את אותו ערך לבין משתנים שהם העתק אחד של השני.

**ג.** אם מספר הפרטים ההתחלתי הוא 1, אז ההסתברות להכחדות היא הפתרון החיובי הקטן של המשוואה $t = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t^2$ ששווה ל 0.5 ( תוחלת מספר הצאצאים של פרט גדולה מ 1 ).

בהינתן שיש במצב התחלתי $k$ פרטים אז סיכויי ההכחדות הם $0.5^k$ . הפתרון המבוקש הוא $0.3 \cdot 0.5^2 + 0.7 \cdot 0.5^3$ .

( מכיוון שמחלקת המצבים הנשנים היא לא מחזורית, אז ל $X_{100}$ יש התפלגות קרובה להתפלגות הסטציונרת ).

---

**שאלה 2**

**א.** אגף ימין תמיד שווה ל 1 יתכן שאגף שמאל שווה ל 0.
באגף ימין עבור כל $n$ קבוע הסגמא שווה ל 1 , כי חייבים להיות בדיוק באחד מהמצבים.
לגבי אגף שמאל, אם כל המצבים הם לא ארגודים, ובנוסף אי אפשר לחזור לשום מצב שבו נמצאים, אז כל הגבולות הם אפסים, והסכום של הגבולות הוא אפס.

הערה

עבור כל מצב $j$ שאינו נשנה חיובי הגבול הוא אפס.

**ג.** זה יתכן.

אם בסיכוי חצי עוברים למצב סופג ובסיכוי חצי עוברים למצבים שאי אפשר לחזור מהם לעצמם אי פעם אז סכום הגבולות הוא חצי.

הערה

אפשר גם שבסיכוי חצי עוברים למחלקה של נשנים חיובית לא מחזוריים ובסיכוי חצי עוברים למצבים שאינם נשנים חיובית.

---

**<u>שאלה 3</u>**

**<u>א</u>.** דוגמא מתאימה היא שרשרת של שני מצבים בעלת מטריצת מעבר שכל איבריה חיובים.
אפשר להשתהות עד כל שלב במצב ההתחלתי למרות שבהסתברות אחת בודאות מגיעים באיזשהו שלב לכל מצב. הטור האינסופי מסתכם ב 1 , אבל כל סכום סופי קטן מ 1 .

<u>דוגמא</u>

שרשרת בת שני מצבים ומטריצת מעבר שכל ארבעת איבריה שווים לחצי.

<u>הערה</u>

שום דוגמא דטרמינסטית לא תתאים בסעיף זה. אם ידוע מראש על שלב שבו מגיעים למצב, אז יש שלב שבו הטור מסתכם ב 1.

**<u>ב</u>.** דוגמא מתאימה היא של שרשרת בת שמונה מצבים בעלת מחזור שמונה. חייבים לבקר בכל מצב התחלתי בכל הזמנים שהם כפולות של שמונה ורק בהם.

<u>דוגמא</u>

שרשרת בעל קבוצת המצבים $\{0,1,2,\cdots,7\}$ שמקיימת שלכל $0 \le i \le 6$ מתקיים $P_{i,i+1} = 1$ ו $P_{7,0} = 1$.

**<u>ג</u>.** נניח שממצב 0 עוברים בסיכוי 0.01 למצב סופג, ואחרת עושים סדרה של שמונה מהלכים שבסיומם חייבים לחזור למצב 0. כך ההסתברות שנחזור לראשונה למצב 0 לאחר שמונה צעדים היא 0.99 .

<u>דוגמא</u>

שרשרת בעל קבוצת המצבים $\{0,1,2,\cdots,7,8\}$ שמקיימת ש $P_{0,1} = 0.99 = 1 - P_{0,8}$ , לכל $1 \le i \le 6$ מתקיים $P_{i,i+1} = 1$ , $P_{7,0} = 1$ ו $P_{8,8} = 1$.

**<u>ד</u>.** זה אפשרי.
האינטואיציה היא שממוצע של הרבה משתנים מקריים ב"ת שווי התפלגות ובעל שונות סופית בהסתברות גדולה לא סוטה מהתוחלת בהרבה.
נתן דוגמא של שרשרת בת 1000 מצבים שבה מכל מצב אפשר לעבור בדיוק למצב אחר מסוים ( שונה ממצב למצב ) כך שאי אפשר לחזור למצב ההתחלתי בפחות מ 1000 צעדים וחייבים לחזור למצב ההתחלתי לאחר בדיוק 1000 קפיצות ( מעגל ). נניח שבכל מצב שוהים עד הקפיצה זמן מעריכי בעל תוחלת $\frac{8}{1000}$ . נסתכל על סכום של 1000 משתנים מעריכיים ב"ת בעלי תוחלת $\frac{8}{1000}$ . לסכומם יש תוחלת של 8 ושונות שקטנה מ 0.1 ( $1000 \cdot \left(\frac{8}{1000}\right)^2$ ) . מאי שיוויון צ'בישב נוכל לראות שההסתברות שהסכום סוטה מ 8 ביותר מ 1 קטנה מ 0.1 .

<u>דוגמא</u>

שרשרת בעל קבוצת המצבים $\{0,1,2,\cdots,999\}$ שבה האיברים הבאים ביוצר האינפינטיסימלי הם האיברים החיובים היחידים ביוצר: $\Delta_{i,i+1} = \frac{1000}{8}$ לכל $0 \le i \le 998$ ו $\Delta_{999,0} = \frac{1000}{8}$.

<u>הערות</u>

שום שרשרת בעלת מספר קטן של מצבים לא יכולה להתאים כאן.
רק פעם אחת יוצאים לראשונה ממצב.

---

**שאלה 4**

**א.** אם למשל $\lambda = 100$ אז לאורך זמן ניתן לתת שרות רק לשני אחוזים מהמגיעים לתחנה.
לאורך זמן, ממוצע מספר המשורתים ביחידת זמן לא יהיה גדול ביותר מקבוע מ 2 וכל מי שלא שורת עד זמן מסוים חוץ מהממתינים לשרות באותו זמן, לא ישורת.

הערה

למעשה, לא כל הזמן יהיו בתחנה שני משורתים, ולכן תוחלת קצב השרות אף קטנה מ 2.
נתן גם הסבר נוסף: הצרכנים שנדחים הם אלה שמגיעים במצב שיש עשרה לקוחות בתחנה ( בשרות ובהמתנה ). מכיוון שמכל מצב ניתן לעבור ישירות רק לשכניו, ומכיון ששכיחות הכניסה לכל קבוצת מצבים שווה לשכיחות היציאה מהקבוצה, אז חל על הוקטור הסטציונרי תנאי האיזון המפורט. עוצמת המעבר מכל מצב למצב העוקב לו היא $\lambda$ ועוצמת המעבר לכל מצב מהמצב העוקב לו היא 1 או 2 . לגבי כל מצב יש למצב העוקב לו, הסתברות סטציונרית הגדולה בלפחות פי $\frac{\lambda}{2} = 50$ משלו. לכן למצב 10 יש הסתברות סטציונרית גדולה מספיק.

הערות

זו מערכת סופית. לכן עבור כל פרמטר $\lambda$ יש נשנית חיובית וקיים וקטור סטציונרי. אין אפשרות לסחף.
דרוש פרמטר הרבה יותר גדול מ 2 כדי שפרופורצית הזמן שנבלה במצב 10 תהיה גדול מ 0.9 .
למעשה גם פרמטר של למשל 15 לא יספיק לשם כך.

**ב.** תשובה סופית: $0.5 \cdot \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+1+1}\right)^9\right) \frac{\lambda}{\lambda+1}$
צריך שהלקוח שהגיע שני יהיה ראשון העוזבים מבין אלה שקיבלו שרות וגם אלה שנדחו. צריך שהקפיצה הראשונה לאחר הגעת הלקוח הראשון תהיה של הגעת השני. צריך גם לדאוג שבזמן שאחר כך, לא כל תשעת האירועים הראשונים יהיו של הגעת לקוח חדש. בהינתן שאלה מתרחשים, יש ללקוח השני סיכוי של חצי לסיים שרות ראשון ( בגלל תכונת חוסר הזכרון, בזמן ששניהם משורתים הוא סימטרי לראשון ).

הערה

הודגש במהלך הקורס וגם בתחילת הבחינה על הלוח וגם בעלפה, שכל לקוח עוזב באיזשהו שלב, בין אם לאחר קבלת שרות או בגלל דחיה.

**ג.** זה לא יתכן. התהליך בזמני הקפיצות הוא שרשרת מרקוב בלתי פריקה בעלת מספר סופי של מצבים. לכן זהו תהליך נשנה חיובי. נשים לב שבכל מקרה עוברים ממצב זוגי למצב אי זוגי וממצב אי זוגי למצב זוגי. לכן השרשרת היא מחזורית. בשרשרת נשנית חיובית ומחזורית אין הסתברויות גבוליות כאשר מתחילים בהתפלגות מנוונת.

הערה

יש וקטור סטציונרי, אבל אין הסתברויות גבוליות ואין התפלגות גבולית.

---

שלומי