

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.

אסור השימוש בכל חומר עזר. אסור השימוש במחשבי כיס.
בארבע השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.

נמקו את תשובותיכם!

בסעיפים בהם אתם טוענים שמהו יתכן, יש להביא דוגמא מנומקת שמראה שהדבר יתכן.

בהצלחה!

שאלה 1 (27 נקודות)

שאלה זו עוסקת בשרשרת מרקוב של הילוך מקרי $\{(X_n, Y_n, Z_n)\}_{n=0}^{\infty}$ על שריג תלת מימדי.
נניח שבכל שלב הולכים בדיוק בכיוון אחד: צפונה בהסתברות p_1 , דרומה בהסתברות p_2 ,
מזרחה בהסתברות p_3 , מערבה בהסתברות p_4 , למעלה בהסתברות p_5 ולמטה
בהסתברות p_6 , כך ש $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$. נניח שהמצב ההתחלתי הוא
הראשית.

א. רק בסעיף זה נניח שמתקיים $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$.

האם יהיה קיים בהסתברות 1 שלב n שבו יתקיים $X_n > Y_n + Z_n$?

ב. מהו אוסף כל הוקטורים $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ שעבורם קיים

$$? \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n| + |Y_n| + |Z_n| > n^{0.5}) > 0$$

ג. מהו אוסף כל הוקטורים $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ שעבורם קיים

$$? \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n| + |Y_n| + |Z_n| > n^{0.8}) > 0$$

שאלה 2 (27 נקודות)

נתונה שרשרת מרקוב בזמן בדיד בת קבוצת המצבים $\{1,2,3,4,5\}$.

- א.** האם יתכן שלסדרה $\{P_{1,2}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ יהיו בדיוק שלושה גבולות חלקיים שונים ?
- ב.** נניח שהסדרה $\{P_{1,1}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת לגבול. כמה לכל היותר מחלקות בלתי פריקות קיימות בשרשרת ?
- ג.** נניח שהסדרה $\{P_{1,1}^{(2n)}\}_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת לגבול. כמה לכל היותר מחלקות בלתי פריקות קיימות בשרשרת ?
-

שאלה 3 (18 נקודות)

יהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ תהליך הסתעפות. נניח שמתקיים $(X_0 = 1)$.

- א.** האם יתכן שיתקיים $P(X_1 = 0) < 0.01$ וגם $0.5 < \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0) < 0.51$?
- ב.** האם יתכן שיתקיים $P(X_1 = 0) > 0.5$ וגם $P(X_{100} = 0) < 0.6$?
-

שאלה 4 (36 נקודות)

בזמן 0 נפתחת התחנה ומתחיל להגיע לתחנה זרם פואסוני בעצמה λ של לקוחות. בתחנה יש שרת אחד שיכול בזמן נתון לתת ללקוח אחד לכל היותר. זמן שרות של לקוח בודד מתפלג מעריכית עם פרמטר 1. כל לקוח שמגיע לתחנה בזמן שהשרת עסוק, מצטרף לתור הממתינים לשרות. כל לקוח שמסיים שרות עוזב את התחנה בסיכוי 0.5 או מצטרף מחדש לתור הממתינים לשרות בסיכוי 0.5. נניח שתמיד כאשר השרת מתפנה, ויש ממתינים בתחנה, מתקבל לשרות קודם כל הלקוח שהמתין לקבלת שרות הכי הרבה זמן ברציפות עד אותו רגע. כך גם לקוח שמסיים שרות ומצטרף מחדש לתור הממתינים, מקבל את העדיפות הנמוכה ביותר ומצטרף לסוף התור.

- א.** האם התהליך שמונה את מספר הלקוחות שבתחנה בזמנים השונים הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף ?
- ב.** עבור אילו ערכי λ נגיע אין סוף פעמים למצב של שני לקוחות בתחנה ?
- ג.** עבור אילו ערכי λ כל לקוח שיגיע לתחנה יתקבל לשרות באיזושהו שלב ?
- ד.** הציגו מערכת משוואות לחישוב תוחלת הזמן שיעבור עד שלראשונה יהיו במערכת שני לקוחות. (בזמן התחלתי אין במערכת לקוחות).
אין צורך לפתור את המערכת.
-