פתרון לבחינה מ 11.08.23

שאלה 1

סעיף א'

שמונה מצבים

בשרשרת סופית לא יתכן שיהיו רק מצבים חולפים, כי במצב חולף מבקרים רק מספר סופי של פעמים ולכן במספר סופי של מצבים חולפים מבקרים רק מספר סופי של פעמים.

יתכן שמצב מסוים הוא מצב סופג, ומכל אחד מהמצבים האחרים יש מסלול אליו ואפילו ישיר. כך כל אחד מהמצבים האחרים הוא לא ארגודי ולכן חולף.

הערה

בשרשרת אין סופית יתכן שכל המצבים יהיו חולפים. זה קורה למשל בהילוך מקרי לא סימטרי שבו מבלים מספר סופי של פעמים בכל אחד מאין סוף המצבים החולפים.

סעיף ב'

שישה מצבים

אם לא קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} P_{1,1}^{(2n)}$ אז גם לא קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} P_{1,1}^{(n)}$ (אם לא קיים הגבול לסדרה חלקית, אז לא קיים הגבול לסדרה כולה). לכן מצב 1 הוא נשנה חיובי ומחזורי.

אילו במחלקה שלו היו רק שני מצבים, אז היה קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} P_{1,1}^{(2n)}$. (גם כאשר המחזור הוא 2 גבול זה קיים). לכן במחלקה שלו יש לפחות שלושה מצבים. יתכן שבמחלקה שלו יש בדיוק שלושה מצבים ומטריצת המעבר במחלקה היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כך לא קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} P_{1,1}^{(2n)}$. יתכן שמכל המצבים האחרים של השרשרת יש מסלולים למחלקה זו. במקרה זה כל המצבים האחרים הם חולפים.

הערות

לגבי מצב חולף קיים גבול. זהו גבול ששווה לאפס.

אם למצב יש מחזור של 2, אז קיים הגבול בצעדים זוגיים.

לא צריכה להיות עוד מחלקה של מצבים נשנים חוץ מהמחלקה שהמחזור שלה הוא 3.

סעיף ג'

שלושה מספרים טבעיים

יתכן שיש מחלקה של מצב סופג, מחלקה של שני מצבים בעלי מחזור 2 ומחלקה של שלושה מצבים בעלי מחזור 3. כך יש שלושה מספרים בעלי התכונה.

בכל מחלקה בעל מחזור d , יש לפחות d מצבים. אין ארבעה מספרים טבעיים שונים שמסתכמים בפחות מ 10. בין מחלקות שונות החיתוך הוא ריק.

הערה

לכל מצב ארגודי יש מחזור מסוים שהוא מספר טבעי. אם"ם למצב יש מחזור 1 אז המצב נקרא לא מחזורי. המחזור הוא המחלק המשותף המכסימלי של קבוצת טבעיים. לכן הוא לא יכול להיות שווה לאפס.

<u>שאלה 2</u>

<u>סעיף א'</u>

היוצר האינפיניטיסימלי הוא

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

מטריצת המעבר בזמני הקפיצות היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>סעיף ב'</u>

שליש

כאשר נמצאים במצב 2 צרכנים נדחים. עצמת זרם המגיעים היא שווה בכל מצב. לכן אחוז הנדחים לאורך זמן שווה לשכיחות של מצב 2 שהיא ההסתברות הסטציונרית שלו.

לפי היוצר האינפינטיסימלי, מערכת משוואות לחישוב הוקטור הסטציונרי היא

$$\begin{cases} \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \\ \pi_0 = \pi_1 \\ 2\pi_1 = \pi_0 + \pi_2 \end{cases}$$

מתקבל פתרון $\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{3}$.

<u>הערות</u>

ההסתברויות הסטציונריות שונות מההסתברויות הסטציונריות בזמני הקפיצות. לא בכל מצב שוהים זמן בעל אותה התפלגות. לכן אין להשתמש בוקטור הסטציונרי המתקבל ממטריצת המעבר בזמני הקפיצות. מתקבל כאן שלכל אחד משלושת המצבים יש אותה הסתברות סטציונרית, למרות שזה כמובן לא קורה בכל שרשרת.

<u>סעיף ג'</u>

1

פתרון בדרך ראשונה

במצב 2 שוהים ברציפות זמן המתפלג $exp(1)$ שלו יש תוחלת של 1. בתקופה זו מגיעים צרכנים בקצב של 1.

פתרון בדרך שניה

בזמן השהות במצב 2 מגיעים לקוחות בקצב 1 וניתן שרות לצרכן בקצב של 1. כל אירוע של הגעת צרכן או סיום שרות הוא בסיכוי חצי מכל אחד משני סוגים אלה, וזאת באופן ב"ת באחרים. כך למשל בסיכוי חצי לא יגיע אף צרכן ובסיכוי רבע יגיע צרכן אחד. כללית בסיכוי 0.5^i יגיעו $i-1$ צרכנים. מספר המגיעים מתפלג כהזזה של משתנה גיאומטרי בעל פרמטר חצי.

<u>הערה</u>

לא מספיק להגיד שקצב העזיבה של מצב 2 הוא 1 זה עדיין לא קובע את תוחלת מספר המגיעים בתקופה.

<u>סעיף ד'</u>

הגבול הוא 1.

בכל זמן t מתקיים $P'_{0,1}(t) = P_{0,0}(t)\cdot 1 + P_{0,1}(t)\cdot(-2) + P_{0,2}(t)\cdot 1$.

מתקיים $\lim_{t\to 0} P_{0,0}(t) = 1$, $\lim_{t\to 0} P_{0,1}(t) = \lim_{t\to 0} P_{0,2}(t) = 0$.

<u>הערות</u>

סביר שהגבול חיובי, כי בזמן אפס יכולים להיות מעברים ממצב 0 למצב 1. בזמן 0 יש רק מעברים ממצב 0 למצב 1. מאוד לא סביר שהגבול שלילי.
ניתן לדבר על שרשרת שהמצב הראשון שלה הוא מצב 1 והמצב האחר מייצג את שני המצבים 0 ו 2.
היוצר של שרשרת זו הוא

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(קצב הכניסה למצב 1 מכל אחד משני המצבים האחרים הוא 1 ולא 2).

<u>שאלה 3</u>

<u>סעיף א'</u>

לא

לכל פרט יש סיכוי חיובי ללדת לפחות צאצא אחד. לכן עבור קבוע k יש הסתברות גדולה מקבוע חיובי, שבכל אחד ממספר קבוע זה של דורות ימצא פרט שלו יהיה לפחות צאצא אחד.

<u>הערה</u>

העובדה שבדור מתקדם היו עדיין פרטים מעידה על כך שלא מדובר בתהליך מנוון שבו יש הסתברות 1 לכך שלא יהיו צאצאים.

<u>סעיף ב'</u>

כן

אם יש תהליך שבו למספר הצאצאים של פרט יש תוחלת קטנה מ 1 (או ששווה ל 1 והוא לא מנוון) אז התהליך נכחד בודאות, למרות שבכל דור נתון יתכן שעדיין אין הכחדות.

<u>הערות לגבי שני הסעיפים</u>

גם אם התהליך נכחד בודאות, יש בכל דור הסתברות חיובית לכך שאין בו עדיין הכחדות. גם אם זהו תהליך שנכחד בודאות, עבור כל ערך של n ניתן להתנות במאורע שעדיין אין הכחדות באותו שלב.
אפשר להפעיל גבול על סדרת הסתברויות אלה גם אם זהו תהליך שנכחד בודאות. זו יכולה להיות התניה בסדרת מאורעות שהגבול של ההסתברויות שלהם הוא אפס. אבל עדיין זו התניה לגיטימית. לכן אין לפתור בהתבסס על ההנחה שזהו תהליך שבוודאות לא נכחד .
גם אם יש מסלול למצב אפס, לא בוודאות מגיעים למצב אפס.

<u>שאלה 4</u>

<u>סעיף א'</u>

התהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ אינו שרשרת מרקוב. התהליך לא הומוגני בזמן.
התהליך כן מקיים את תכונת המרקוביות. צריך לציין איזה תכונה הוא לא מקיים.
עבור קבוע m שהוא מצב בתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, אם בשלב $n = m$ התקבלו m תוצאות "פלי" משמע שעדיין לא התגלה המטבע ההוגן. כך מספר תוצאות "פלי" גדל בשלב הבא בסיכוי גדול מחצי. אם עבור $n > m$ התקבלו m תוצאות "פלי" משמע שכבר התגלה המטבע ההוגן ומספר תוצאות ה"פלי" יגדל בשלב הבא רק בסיכוי חצי.

<u>סעיף ב'</u>

התהליך $\{Y_{2^n}\}_{n=0}^{\infty}$ אינו שרשרת מרקוב. התהליך לא הומוגני בזמן.
התהליך כן מקיים את תכונת המרקביות. צריך לציין איזה תכונה הוא לא מקיים.
עד שנקבל תוצאת "עץ" תמיד נבחר להטיל את המטבע שבו קיבלנו לא יותר תוצאות "פלי" (יש לו סיכוי גבוה יותר להיות המטבע ההוגן). לכן עד שנגלה את המטבע ההוגן, בשלבים זוגיים יהיה מספר מצטבר שווה של הטלות של שני המטבעות. המרווחים $2^{n+1} - 2^n$ הם לא בעלי אורך קבוע. לכן הסיכוי שעד הפעם הבאה נגלה את זהות המטבע ההוגן הם משתנים (הם גדלים כאשר n גדל).

<u>הערות</u>

לגבי תהליכים אלה מתקיימת תכונת המרקוביות, כי אם המצב הנוכחי והתקופה ידועים, אז הכרת העבר הקודם היא מיותרת. אם ידיעת התקופה הופכת את ידיעת העבר הקודם למיותרת אז התהליכים הם כן בעלי תכונת המרקוביות. אבל כאמור התהליכים אינם הומוגנים בזמן.
זה שההתפלגויות של המשתנים השונים שבסדרה הן שונות, לא אומר לכשעצמו שהתהליך אינו הומוגני בזמן.

שאלה 5

קיימת שרשרת כזאת.
עבור כל t ראשוני קבוצת המצבים של המחלקה t תהיה קבוצת החזקות החיוביות של המספר הראשוני t. נניח שבכל מצב במחלקה t , עבור $i > 2$ עוברים בסיכוי שווה ממצב t^i למצבים t^{i-1} או t^{i+1}.
ממצב t עוברים בהכרח למצב t^2. בכל מחלקה המצבים הם נשנים אפס כפי שבהילוך מקרי סימטרי על חצי ישר הם נשנים אפס.

<u>הערות</u>

רק מחלקה אין סופית יכולה להיות נשנית אפס.
בין מחלקות שונות אין מעברים. אסור שיהיה מצב שמשותף ליותר ממחלקה אחת.
לא חייבים לתת דוגמא שבכל מחלקה המצבים הם חזקות של מספרים ראשוניים.
אפשרי למשל שהמחלקה ה t תכלול רק מצבים שהם שברים בקטע הפתוח שבין t ל $t + 1$.
בהילוך מקרי סימטרי על חצי ישר, בהסתברות אחת חוזרים למצב הקצה, כמו שבהילוך מקרי סימטרי רגיל בהסתברות אחת חוזרים למצב הקצה. כמו שבהילוך מקרי סימטרי רגיל תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב היא אין סוף, כך גם בהילוך על חצי ישר תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב הקצה היא אין סופית. לכן מצב הקצה ואיתו כל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה הם נשנים אפס.
אילו קבוצת המצבים היתה של השלמים בלבד ומכל מצב היינו יכולים לעבור רק לשכניו, אז לא היו יכולות להיות יותר משתי מחלקות אין סופיות, וכך לא היו יכולות להיות יותר משתי מחלקות נשנות אפס.
אבל בשאלה הזאת אין הנחה שעוברים רק לשכנים.

שלומי